Μάθημα 4

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

4.1 Ορισμός και Άλγεβρα μιγαδικών αριθμών

4.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1 - 1 (φανταστική μονάδα). *Ορίζεται από τη σχέση*

$$i = (-1)^{1/2}. \tag{4.1.1 - 1}$$

Άρα

$$i^2 = -1. \tag{4.1.1 - 2}$$

[1] Ο συμβολισμός $i = (-1)^{1/2}$ αρχικά δόθηκε από τον Euler, ενώ ο Gauss επινοώντας τη γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών απέδειξε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι το ίδιο συγκεκριμένοι, όπως οι πραγματικοί αριθμοί, αφού είναι δυνατόν να παρασταθούν γεωμετρικά στο επίπεδο.

Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1 - 1 είναι δυνατόν να οριστούν οι παρακάτω αριθμοί:

---

[1] Βλέπε βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4, 5, 6] και
https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number

Ορισμός 4.1.1 - 2 (φανταστικός αριθμός). *Ορίζεται ως φανταστικός κάθε αριθμός της μορφής $z=\beta i$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Ορισμός 4.1.1 - 3 (μιγαδικός αριθμός). *Ορίζεται ως μιγαδικός κάθε αριθμός (complex number) της μορφής $z = \alpha+\beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα.*

Επομένως οι αριθμοί $3\,i$, $-4\,i$, $\sqrt{2}\,i$ είναι φανταστικοί, ενώ οι αριθμοί $1+2\,i$, $2-5\,i$, $4+\sqrt{3}\,i$ μιγαδικοί.

Οι μιγαδικοί αριθμοί θα συμβολίζονται συνήθως με τα γράμματα z, w κ.λπ., ενώ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με $\mathbb{C}$ και το σύνολο των φανταστικών αριθμών με $\mathbb{I}$.

Ορισμός 4.1.1 - 4. *Αν $z = \alpha+\beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ορίζεται ως* **πραγματικό μέρος** *του z ο πραγματικός αριθμός*

$$\operatorname{Re} z = \alpha \tag{4.1.1 - 3}$$

και ως **φανταστικό μέρος** *ο πραγματικός αριθμός*

$$\operatorname{Im} z = \beta . \tag{4.1.1 - 4}$$

Άρα, αν $z=3-i$, τότε $\operatorname{Re} z = 3$ και $\operatorname{Im} z = -1$.

4.1.2 Ισότητα

Ορισμός 4.1.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \gamma+\delta i$. Τότε είναι $z_1 = z_2$, όταν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.*

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $x-2y\,i = 3+4$, τότε $x=2$ και $-2y=4$, δηλαδή $y=-2$.

Αποδεικνύεται ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο $\mathbb{C}$ μια σχέση ισοδυναμίας.[2]

[2] Μία σχέση $\sim$ ορίζει μια **σχέση ισοδυναμίας** σε ένα σύνολο Σ, όταν πληροί την αυτοπαθή, συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα.

4.1.3 Πρόσθεση

Ορισμός 4.1.3 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί* $z_1 = \alpha + \beta i$ *και* $z_2 = \gamma + \delta i$. *Τότε ορίζεται ως* **άθροισμά** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i. \tag{4.1.3 - 1}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 3$ και $z_2 = 4 + 5\,i$. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3 - 1)$ είναι

$$z_1 + z_2 = (1 + 4) + (-3 + 5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 + z_2 = 5 + 2\,i.$$

Ιδιότητες

i) **αντιμεταθετική** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) **προσεταιριστική** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) αν $z_1 + z = z_2 + z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z \in \mathbb{C}$ (νόμος διαγραφής στο $\mathbb{C}$),

iv) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 0 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$z + z^* = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.1.3 - 2}$$

Ο μιγαδικός $0 + 0i$ λέγεται το **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης.

v) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z' = (-\alpha) + (-\beta)i$, έτσι ώστε να ισχύει

$$z + z' = 0. \tag{4.1.3 - 3}$$

Ο μιγαδικός z' λέγεται **αντίθετο** ή **συμμετρικό** στοιχείο του z για την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$.

vi) Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε η εξίσωση

$$z_1 + z = z_2 \tag{4.1.3 - 4}$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_2 + (-z_1)$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $(4.1.3-4)$ λέγεται διαφορά, ενώ η πράξη **αφαίρεση**.

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε

$$z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i. \tag{4.1.3 - 5}$$

Παράδειγμα 4.1.3 - 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 του Παραδείγματος 4.1.3 - 1. Τότε σύμφωνα με την $(4.1.3-5)$ είναι

$$z_1 - z_2 = (1-4) + (-3-5)i, \quad \text{δηλαδή} \quad z_1 - z_2 = -3 - 8\,i.$$

4.1.4 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 4.1.4 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Τότε ορίζεται ως* **γινόμενό** *τους ο μιγαδικός αριθμός*

$$z_1 z_2 = (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i. \tag{4.1.4 - 1}$$

Σημείωση 4.1.4 - 1

Ο τύπος $(4.1.4-1)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha + \beta\, i)(\gamma + \delta\, i) = \alpha(\gamma + \delta\, i) + \beta\, i(\gamma + \delta\, i) \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta\, i + \beta\gamma\, i + \overbrace{\beta\delta\, i^2}^{(4.1.1-2):\quad i^2=-1} \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1.4 - 1

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - 3\,i$ και $z_2 = 4 + i$. Τότε σύμφωνα με τη διαδικασία της Σημείωσης 4.1.4 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2-3\,i)(5+i) = 2(4+i) - 3i(4+i) \\ &= 8 + 2\,i - 12\,i - 3\,i^2 = 8 + (2-12)i - 3(-1) \\ &= (8+3) + (2-12)i = 11 - 10\,i. \end{aligned}$$

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική $z_1 z_2 = z_2 z_1$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$,

ii) προσεταιριστική $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\,(z_2 z_3)$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iii) επιμεριστική $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$,

iv) αν $z_1 z = z_2 z$, τότε $z_1 = z_2$ για κάθε $z \in$ με $z \neq 0$ και για κάθε z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ (νόμος της διαγραφής του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$),

v) υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1 + 0\,i$, έτσι ώστε

$$zz^* = z \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{4.1.4 - 2}$$

Ο μιγαδικός $1 + 0i$ λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** ή **μονάδα** και θα συμβολίζεται στο εξής με 1.

vi) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός $z^* = 1/z = z^{-1}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$zz^* = 1. \tag{4.1.4 - 3}$$

Ο μιγαδικός αριθμός $1/z = z^{-1}$, λέγεται **αντίστροφος** του z ή το **συμμετρικό** στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$.

vii) Αν $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$, τότε η εξίσωση

$$z_2 z = z_1 \tag{4.1.4 - 4}$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{C}$ την $z = z_1 z_2^{-1} = z_1/z_2$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $(4.1.4-4)$ λέγεται **πηλίκο** του z_1 δια του z_2 και συμβολίζεται z_1/z_2, ενώ η πράξη **διαίρεση**.

Σημείωση 4.1.4 - 2

Παραδείγματα υπολογισμού του αντίστροφου και του πηλίκου μιγαδικών αριθμών θα δοθούν στην Παράγραφο 4.3.

4.2 Δύναμη μιγαδικών αριθμών

4.2.1 Ορισμός

Οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζονται για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς, δηλαδή

$$z^1 = z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}$$

και διαδοχικά (επαγωγικά)

$$z^\nu = z^{\nu-1} z \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

Επίσης ορίζεται ότι

$$z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu} \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0 \text{ και } \nu = 1, 2, \ldots,$$

ενώ ειδικά ισχύει ότι $z^0 = 1$ με $z \neq 0$.

Παρατήρηση 4.2.1 - 1

Η παράσταση 0^0 δεν έχει έννοια στο $\mathbb{C}$.

4.2.2 Ιδιότητες

Οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

και γενικά

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad i^{4k+4} = 1.$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Παράδειγμα 4.2.2 - 1

Έστω ο μιγαδικός $z_1 = 2 + 3\,i$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z^2 &= (2+3\,i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\,i + \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &= (4-9) + 12\,i = -5 + 12\,i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (2+3\,i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot 3\,i + 3\cdot 2\cdot \overbrace{(3\,i)^2}^{9\,i^2=9(-1)=-9} \\ &\quad + \overbrace{(3\,i)^3}^{27\,i^3=27(-1)\,i=-27\,i} \\ &= 8 + 36\,i - 54 - 27\,i = (8-54) + (36-27)i = -46 + 9\,i. \end{aligned}$$

4.3 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

4.3.1 Ορισμός

Ορισμός 4.3.1 - 1. *Έστω $z = \alpha + \beta i$.Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha - \beta i$ λέγεται* **συζυγής** *του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλαδή*

$$\overline{z} = \alpha - \beta i. \tag{4.3.1 - 1}$$

Είναι προφανές ότι ισχύουν

$$z\,\overline{z} = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2 + \beta^2, \tag{4.3.1 - 2}$$

$$z + \overline{z} = 2\alpha. \tag{4.3.1 - 3}$$

Σημείωση 4.3.1 - 1

Ο τύπος (4.3.1−1) χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του αντίστροφου και του πηλίκου των μιγαδικών αριθμών, όταν απαιτείται οι αριθμοί αυτοί να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta\, i$. Συγκεκριμένα, αν ο παρονομαστής είναι ο $x + y\, i$, τότε πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον συζυγή του $x + y\, i$, δηλαδή τον $x - y\, i$. Τότε $(x + y\, i)(x - y\, i) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$.

Παράδειγμα 4.3.1 - 1

Να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta\, i$ οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = \frac{1}{3 - i} \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{1 + 2\, i}{3 - i}\,.$$

Λύση. Ο συζυγής του μιγαδικού $3 - i$ είναι ο $3 + i$. Τότε σύμφωνα με τη Σημείωση 4.3.1 - 1 διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - i}\,\frac{3 + i}{3 + i} = \frac{3 + i}{3^2 - i^2} = \frac{3 + i}{3^2 - (-1)} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\, i\,, \\ z_2 &= \frac{1 + 2\, i}{3 - i} = \frac{1 + 2\, i}{3 - i}\,\frac{3 + i}{3 + i} = \frac{(1 + 2\, i)(3 + i)}{3^2 - i^2} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\, i\,. \end{aligned}$$

4.3.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $(\overline{-z}) = -\overline{z}$,

ii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

iii) $(\overline{z^\nu}) = (\overline{z})^\nu \quad$ με $\quad \nu = 1, 2, \ldots$,

iv) $\left(\overline{z^{-1}}\right) = (\overline{z})^{-1} \quad$ με $\quad z \neq 0$,

v) $\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right) = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad$ με $\quad z_2 \neq 0$,

vi) $\overline{\alpha z} = \alpha\, \overline{z} \quad$ για κάθε $\quad \alpha \in \mathbb{R}$,

vii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

viii) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Όμοια γενικεύεται.

Πρόταση 4.3.2 - 1. *Αν ένας μιγαδικός αριθμός είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του μιγαδικός είναι επίσης ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης.*

4.3.3 Συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x+iy$. Επειδή σε πολλές εφαρμογές απαιτείται τα x, y να εκφραστούν συναρτήσει του z, θεωρώντας τον συζυγή μιγαδικό $\overline{z} = x - iy$ εύκολα προκύπτει ότι

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}\,. \tag{4.3.3 - 1}$$

Οι συντεταγμένες $(z, \overline{z})$, που συμπίπτουν με τις (x, y), λέγονται τότε **συζυγείς μιγαδικές συντεταγμένες** ή απλά **συζυγείς συντεταγμένες**.

4.4 Μέτρο μιγαδικών αριθμών

4.4.1 Ορισμός

Ορισμός 4.4.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$. Τότε ορίζεται ως* **μέτρο** *(modulus) ή απόλυτη τιμή του z και συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός*

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.4.1 - 1}$$

Από την $(4.4.1 - 1)$ άμεσα προκύπτει ότι

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 1

Σύμφωνα με την $(4.4.1 - 1)$ έχουμε:

i) $|1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} \;=\; 2,$

ii) $\dfrac{1+i}{2+3\,i} = \dfrac{1+i}{2+3\,i}\,\dfrac{2-3\,i}{2-3\,i} = \dfrac{-1+5\,i}{2^2-3^2\,i^2} = \dfrac{1}{13}\,(-1+5\,i)$, οπότε

$$\left|\frac{1+i}{2+3\,i}\right| = \frac{1}{13}\sqrt{(-1)^2+5^2} = \frac{1}{13}\sqrt{26},$$

iii) $(1+2\,i)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot 2\,i+3\cdot 1\cdot(2\,i)^2+(2\,i)^3 = 1+6\,i-12-8\,i = -11-2\,i,$

δηλαδή

$$\left|(1+2\,i)^3\right| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{125}.$$

Παράδειγμα 4.4.1 - 2

Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z-1| = |z-2| = |z-i|.$$

Λύση. Έστω $z = x + i\,y$. Τότε από τη σχέση

$$\begin{aligned} |z-1| \;&=\; |z-2| \quad \text{προκύπτει ότι} \quad (x-1)^2+y^2 \;=\; (x-2)^2+y^2, \\ &\qquad\text{οπότε} \qquad x = \frac{3}{2}\,, \\ |z-1| \;&=\; |z-i| \qquad\qquad\qquad (x-1)^2+y^2 \;=\; x^2+(y-1)^2, \\ &\qquad\text{οπότε} \qquad y = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

■

4.4.2 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. Η ιδιότητα γενικεύεται.

ii) $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

iii) $|z_1 z_2| = |z_1|\;|z_2|$. Όμοια γενικεύεται.

iv) $|z^\nu| = |z|^\nu$ για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$.

v) $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ με $z \neq 0$.

vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ με $z_2 \neq 0$.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, όταν

i) $x + yi = |x - yi|$

ii) $x + yi = (x - yi)^2$

iii) $x + 2yi + 5y - ix = 7 + 5i$

iv) $\dfrac{x}{1+2i} + \dfrac{y}{3+2i} = \dfrac{5+6i}{8i-1}$.

2. Να εκφραστούν οι παρακάτω μιγαδικοί στη μορφή $\alpha + \beta i$

i) $(i-2)\left[5(1-i) - 4(1+i)^2\right]$

ii) $\dfrac{\left(i^4 + i^9 + i^{16}\right)}{\left(2 - i^5 + i^{10} - i^{15}\right)}$

iii) $\dfrac{(2+i)(2-i)(1+i)}{(1-i)^3}$

iv) $\dfrac{(1-i)^4 - (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$.

3. Αν

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{και} \quad z_3 = 2 + 3i,$$

να υπολογιστούν οι παραστάσεις

i) $|2z_2 - 5z_1|^2$

ii) $\operatorname{Re}\left(2z_1^2 + 3z_2^2 - z_3\right)$

iii) $(z_3 - z_1)^2$

iv) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_1 z_2}{z_3}\right)$

v) $|z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2|$

vi) $z_3\left(\overline{z}_3\right)^{-1} + \overline{z}_3\, z_3^{-1}$.

4. Να υπολογιστεί ο μιγαδικός z, όταν

$$|z-1| = |z-2| = |z-i|.$$

5. Αν $z = x + iy$, να υπολογιστεί σχέση μεταξύ των x και y, όταν

$$|z-i| = |z+2|.$$

6. Να εκφραστούν συναρτήσει των μιγαδικών συζυγών συντεταγμένων οι εξισώσεις

$i)\quad x^2+16y^2=25 \qquad\qquad ii)\quad x^2+y^2-5x+y-1=0.$

7. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των Παραγράφων 4.3.2 και 4.4.2.

Απαντήσεις

1. (i) Μετά τις πράξεις εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη προκύπτει το σύστημα $x^2-x-y=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(ii) Όμοια το σύστημα $x-x^2+y^2=0$ και $y(1+2x)=0$, οπότε έχουμε τις λύσεις

$$(x,y)=(1,0),\quad (0,0),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \text{και}\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(iii) Όμοια $x+5y=7$ και $2y-x=5$, οπότε $x=-\frac{11}{7}$ και $y=\frac{12}{7}$.

(iv) Πολλαπλασιάζοντας με τους συζυγείς των παρονομαστών τελικά προκύπτει το σύστημα $13x+15y=43$ και $13x+5y=23$, οπότε $x=1$ και $y=2$.

2. (i) $3+31\,i$, (ii) $2+i$, (iii) $-\frac{5}{2}$, (iv) $-2-i$.

3. (i) Είναι $2z_2-5z_1=-3+7\,i$ κ.λπ. (ii) $\mathrm{Re}(-2-i)=-2$, (iii) $-15+8\,i$, (iv) $\mathrm{Im}\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{13}\,i\right)=-\frac{6}{13}$, (v) 0, (vi) $-\frac{10}{13}$.

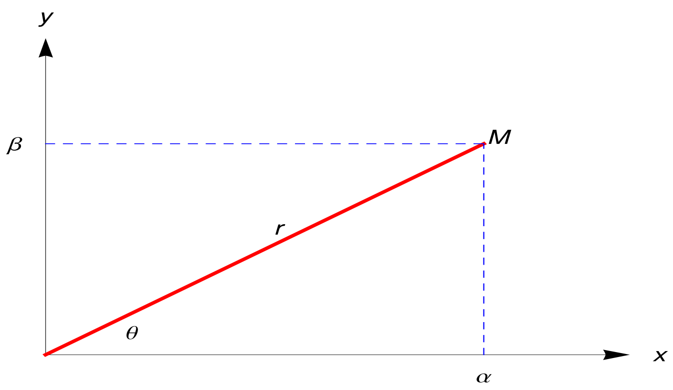
4. Έστω $z=x+i\,y$. Τότε από τη λύση του συστήματος $|z-1|^2=|z-2|^2$ και $|z-1|^2=|z-i|^2$ προκύπτει τελικά ότι $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. **5.** $4x+2y+3=0$ (ευθεία).

6. Αντικατάσταση των x, y με τις εκφράσεις των τύπων (4.3.3 − 1) κ.λπ. (vii) Έστω $z_1=\alpha+\beta\,i$, $z_2=\gamma+\delta\,i$ κ.λπ.

4.5 Μορφές μιγαδικού αριθμού

4.5.1 Τριγωνομετρική μορφή

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του μιγαδικού $z=\alpha+\beta\,i$ και του ζεύγους (α,β) στο $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Σύμφωνα με αυτή την αντιστοιχία είναι δυνατόν να γίνει μια γεωμετρική παράσταση του μιγαδικού αριθμού από ένα σημείο του επιπέδου. Συγκεκριμένα, έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy (Σχ. 4.5.1 - 1) όπου στον άξονα τετμημένων Ox απεικονίζεται το πραγματικό μέρος του z, δηλαδή το α και στον άξονα τεταγμένων Oy το φανταστικό του μέρος β. Τότε προφανώς υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μιγαδικών αριθμών $z=$



Σχήμα 4.5.1 - 1: τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

$\alpha + \beta\, i$ και των σημείων $M(\alpha, \beta)$ του επιπέδου Π, που οι συντεταγμένες τους ορίζονται από το σύστημα Oxy. Το επίπεδο Π λέγεται στην περίπτωση αυτή και **μιγαδικό επίπεδο** ή **επίπεδο Gauss**.

Έστω τώρα ένα [3]πολικό σύστημα συντεταγμένων (polar coordinate system) (ρ, θ) με πόλο το 0 και πολικό άξονα την ημιευθεία Ox. Τότε, αν $z = \alpha + \beta i = (\alpha, \beta)$ με $z \neq 0$, σύμφωνα με τις σχέσεις $(1.1 - 9)$ του Μαθήματος *Διανύσματα* θα ισχύει

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \cos\theta &= \frac{\alpha}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{\beta}{|z|} \quad \text{με} \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{aligned} \tag{4.5.1 - 1}$$

Οι σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ προσδιορίζουν τα ρ, θ, όταν είναι γνωστά τα α, β και αντίστροφα.

Επομένως το ρ ισούται με το μέτρο του z, ενώ η γωνία θ, θα υπολογίζεται από τις σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ και θα λέγεται στο εξής **πρωτεύον όρισμα** (Argument)[4] του z, ενώ θα συμβολίζεται με $\mathrm{Arg}z$.

Άρα από τις σχέσεις $(4.5.1 - 1)$ προκύπτει ότι ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ γράφεται

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \;\; \text{όταν} \;\; \theta \in [0, 2\pi) \;\; \text{και} \;\; |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{4.5.1 - 2}$$

[3]Βλέπε Μάθημα *Διανύσματα - Βασικοί ορισμοί*.

[4]Στη βιβλιογραφία πολλές φορές ως $\mathrm{Arg}z$ θεωρείται η γωνία θ με $\theta \in [-\pi, \pi)$ ή $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Η $(4.5.1-2)$ είναι γνωστή ως η **τριγωνομετρική μορφή** (polar form) του z.

Σημειώσεις 4.5.1 - 1

i) Σύμφωνα με γνωστή τριγωνομετρική ιδιότητα στην $(4.5.1-1)$ ο μιγαδικός αριθμός z προσδιορίζεται εκτός από το ζεύγος (ρ, θ) και από το ζεύγος $(\rho, \theta + 2k\pi)$, όταν $k \in \mathbb{Z}$. Τότε οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ ορίζουν το **όρισμα** του μιγαδικού, που συμβολίζεται με $\arg z$.

ii) Υπενθυμίζονται οι παρακάτω βασικές ταυτότητες ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a, \end{cases} \tag{4.5.1 - 3}$$

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi - a. \end{cases} \tag{4.5.1 - 4}$$

Παράδειγμα 4.5.1 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z = -1 + i.$$

Τότε $\alpha = -1$ και $\beta = 1$, οπότε $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^1} = \sqrt{2}$. Άρα

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\,\pi}{4}\,,$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{3\,\pi}{4} \implies \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \tag{1}$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \implies \theta = \frac{5\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 1. \tag{2}$$

Επίσης $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$, οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \implies \theta = \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0 \tag{3}$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{3\,\pi}{4}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 3\,\pi/4$. Τότε σύμφωνα με την $(4.5.1 - 2)$ η τριγωνομετρική μορφή είναι

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\,\pi}{4} + i\sin\frac{3\,\pi}{4}\right).$$

4.5.2 Σχετικά θεωρήματα

Με την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών αποδεικνύονται τα παρακάτω χρήσιμα θεωρήματα:

Θεώρημα 4.5.2 - 1. *Έστω*

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \textit{και} \quad z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,.$$

Τότε είναι $z_1 = z_2$ *τότε και μόνον, όταν*

$$|z_1| = |z_2| \quad \textit{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 2 (de Moivre). *Αν* $z_k = |z_k|\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$; $k = 1, 2, \ldots, \nu$, *τότε*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \ldots z_\nu &= |z_1|\;|z_2|\ldots|z_\nu|\,[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) \\ &\quad + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu)] \end{aligned} \tag{4.5.2 - 1}$$

για κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$.

Πόρισμα 4.5.2 - 1 (τύπος de Moivre). *Ισχύει ότι (de Moivre's formula)*

$$z^\nu = |z|^\nu\,[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)] \quad \textit{για κάθε} \quad \nu = 2, 3, \ldots\,. \tag{4.5.2 - 2}$$

Θεώρημα 4.5.2 - 3. *Αν* $z = |z(\cos\theta + i\sin\theta)$ *με* $z \neq 0$, *τότε*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\,.$$

Θεώρημα 4.5.2 - 4. *Αν* $z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ *με* $z_2 \neq 0$, *τότε*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{4.5.2 - 3}$$

Πόρισμα 4.5.2 - 2. *Ισχύει ότι*

$$\frac{1}{z^\nu} = \frac{1}{|z|^\nu}\left[\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta)\right]; \quad \nu = 1, 2, \dots .$$

Παράδειγμα 4.5.2 - 1

Έστω οι μιγαδικοί

$$\begin{aligned} z_1 &= = \sqrt[3]{2}(-1+i) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{και} \\ z_2 &= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{5}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\sin\frac{7\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Τότε σύμφωνα με τον τύπο

(4.5.2 − 1):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{2^2}\,\sqrt[6]{5^3}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{500}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\,\sin\frac{23\pi}{12}\right) \\ &\approx 2.721273 - 0.729163\,i. \end{aligned}$$

(4.5.2 − 2):

$$\begin{aligned} z_1^4 &= \left(\sqrt[3]{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\cdot 3\pi}{4} + i\,\sin\frac{4\cdot 3\pi}{4}\right) \\ &= 2\,\sqrt[3]{2}\,(\cos 3\pi + i\,\sin 3\pi) = -2\,\sqrt[3]{2} \approx -2.519842. \end{aligned}$$

(4.5.2 − 3):

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{5^3}}\left(\cos\frac{-5\pi}{12}+i\,\sin\frac{-5\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{\frac{4}{125}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\,\sin\frac{5\pi}{12}\right)\\
&\approx 0.145833-0.544255\,i.\end{aligned}$$

4.5.3 Πολική μορφή

Ορισμός 4.5.3 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, που γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$. Τότε η* **πολική** *μορφή (angle notation) του μιγαδικού ορίζεται από τη σχέση*

$$z=|z|^{\llcorner\theta}, \tag{4.5.3 - 1}$$

όταν η γωνία θ εκφράζεται σε μοίρες.

Παράδειγμα 4.5.3 - 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z=-\sqrt{3}+i.$$

Τότε $\alpha=-\sqrt{3}$ και $\beta=1$, οπότε $|z|=2$. Άρα

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\,\pi}{6}\,,$$

οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{5\,\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{5\,\pi}{6}\,,\quad \text{όταν}\quad k=0 \tag{1}$$

ή

$$\theta=2k\pi-\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{7\,\pi}{6}\,,\quad \text{όταν}\quad k=1. \tag{2}$$

Επίσης $\sin\theta=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$, οπότε

$$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad\Longrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{6}\,,\quad \text{όταν}\quad k=0 \tag{3}$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{5\,\pi}{6}\,, \quad \text{όταν} \quad k = 0\,. \tag{4}$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\,\pi/6$. Τότε

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6} + i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right), \quad \text{οπότε} \quad z = 2^{\lfloor 150}.$$

4.5.4 Εκθετική μορφή

Ορισμός 4.5.4 - 1. *Έστω ο μιγαδικός $z = x + iy$. Τότε η δύναμη e^z ορίζεται ότι είναι ο μιγαδικός αριθμός*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \tag{4.5.4 - 1}$$

με y σε rad.

Ο Ορισμός 4.5.4 - 1, όταν $y = 0$, συμφωνεί με τον ορισμό του e^x με $x \in \mathbb{R}$, ενώ, όταν $x = 0$, ορίζει την ταυτότητα του Euler (Euler's formula)

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{4.5.4 - 2}$$

Προφανώς τότε

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^y + \sin^2 y} = 1.$$

Από τον τύπο $(4.5.1 - 2)$, που αναφέρεται στην τριγωνομετρική μορφή $z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ του μιγαδικού z και τον τύπο $(4.5.4 - 2)$, όταν γραφεί ως

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

προκύπτει ότι

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = |z|e^{i\,\theta}.$$

Η μορφή αυτή ορίζεται στη συνέχεια ως εξής:

Ορισμός 4.5.4 - 2 *Η* **εκθετική μορφή** *ή* **μορφή Euler** *του z (complex exponential form) ορίζεται από τη σχέση*

$$z = |z|e^{i\theta}, \tag{4.5.4 - 3}$$

όταν $\theta = \operatorname{Arg} z$.

Παράδειγμα 4.5.4 - 1

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.5.3 - 1 είναι

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\,\pi}{6}+i\sin\frac{5\,\pi}{6}\right)=2\,e^{i\,\frac{5\pi}{6}}.$$

Σημείωση 4.5.4 - 1

Επειδή σύμφωνα με την $(4.5.4-2)$ προφανώς ισχύουν

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta+i\,\sin\theta,\\ e^{-i\,\theta} &= \cos(-\theta)+i\,\sin(-\theta)=\cos\theta-i\,\sin\theta \end{aligned}$$

προσθέτοντας, αντίστοιχα αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτουν οι παρακάτω **τύποι του Euler** για το συνημίτονο, αντίστοιχα ημίτονο:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}\quad\text{και}\quad\sin\theta=\frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2\,i}. \tag{4.5.4 - 4}$$

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) $e^{z_1}\,e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

ii) Η δύναμη e^z είναι πάντοτε διάφορη του μηδενός.

iii) Είναι $\left|e^{ix}\right|=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Αν $e^z=1$, τότε $z=2k\pi i$ με $k\in\mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

v) Αν $e^{z_1}=e^{z_2}$, τότε $z_1-z_2=2k\pi i$ με $k\in\mathbb{Z}$ και αντίστροφα.

4.6 Ρίζα μιγαδικού αριθμού

4.6.1 Ορισμός και θεώρημα υπολογισμού

Ορισμός 4.6.1 - 1. *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ με $z\neq 0$. Τότε ορίζεται ως ν-τάξης ρίζα του z κάθε μιγαδικός αριθμός $w=x+iy$ με την ιδιότητα*

$$(x+iy)^{\nu}=\alpha+\beta i,\quad \text{όταν}\quad \nu=2,3,\ldots\,.$$

Σχετικά αποδεικνύεται ότι ισχύει:

Θεώρημα 4.6.1 - 1. *Αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, τότε οι μιγαδικοί αριθμοί*

$$z_k = \sqrt[\nu]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right); \quad k = 0,\, 1,\, \ldots, \nu - 1 \quad (4.6.1 - 1)$$

είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και επαληθεύουν την εξίσωση $w^\nu = z$.

Παράδειγμα 4.6.1 - 1

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$(-1 - i)^{2/3}.$$

Λύση. Έστω $z = -1 - i$. Τότε $|z| = \sqrt{2}$ και

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ για } k = 0$$

ή

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

και

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

οπότε

$$\theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ για } k = 1$$

ή

$$\theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ με } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ για } k = 0.$$

Άρα $\operatorname{Arg} z = 5\pi/4$, οπότε με τον τύπο $(4.5.2 - 2)$ του de Moivre είναι

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2\left[\cos 2\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin 2\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ η 3ης τάξη ρίζα του z^2 θα είναι

$$z^{2/3}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/2}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\pi/2}{3}\right);\quad k=0,\,1,\,2,$$

δηλαδή οι παρακάτω 3 διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{6}}. \end{aligned}$$

4.6.2 Εξίσωση διωνυμική

Ορισμός 4.6.2 - 1. *Λέγεται* **διωνυμική** *κάθε εξίσωση της μορφής $z^\nu=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{C}$ με $\alpha\neq 0$ και $\nu=1,2,\ldots$.*

Η λύση των εξισώσεων της μορφής αυτής γίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.6.1 - 1 σύμφωνα με τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 4.6.2 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^5=-32\,i.$$

Λύση. Έχουμε

$$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

οπότε

$$z^5=-32\,i=32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.1-1)$ είναι

$$z_k=2\left(\cos\frac{2k\pi-\pi/2}{5}+i\sin\frac{2k\pi-\pi/2}{5}\right);\quad k=0,\,1,\,2,\,3,\,4.$$

Παράδειγμα 4.6.2 - 2 (ν **- τάξης ρίζες της μονάδας)**

Όμοια να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^{\nu} = 1, \quad \text{όταν} \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Λύση. Έχουμε $z^{\nu} = 1\,(\cos 0 + i \sin 0)$, οπότε

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{\nu} + i \sin \frac{2k\pi}{\nu} \right); \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1.$$

Επειδή προφανώς ισχύει

$$z_k = \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu} \right)^k; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, \nu - 1$$

έχουμε

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \;\; z_1 = \cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu}, \\ z_2 &= \left(\cos \frac{2\pi}{\nu} + i \sin \frac{2\pi}{\nu} \right)^2 = z_1^2, \; z_3 = z_1^3, \; \ldots, \; z_{\nu-1} = z_1^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Άρα οι ν-τάξης ρίζες της μονάδας είναι

$$1, \quad z_1, \quad z_1^2, \quad z_1^3, \quad \ldots, \quad z_1^{\nu-1}.$$

Γεωμετρικά απεικονίζονται στις ν κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου που εγγράφεται σε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση $|z| = 1$ και λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

4.6.3 Εξίσωση 2ου βαθμού

Έστω στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{όταν} \;\; a \neq 0. \tag{4.6.3 - 1}$$

Η $(4.6.3-1)$ γράφεται $az^2+bz=-c$, οπότε διαδοχικά προκύπτουν

$$
\begin{aligned}
z^2+\frac{b}{a}z &= -\frac{c}{a} \quad \text{ή} \\
z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{ή} \\
\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4.6.3 - 2}
$$

Παράδειγμα 4.6.3 - 1

Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$
z^2+(2i-3)z+5-i=0
$$

Λύση. Είναι $a=1$, $b=2i-3$ και $c=5-i$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο $(4.6.3-2)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2} \\
&= \frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8\,i}}{2}=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2},
\end{aligned}
$$

δηλαδή $z_1=2-3i$ και $z_2=1+i$.

Ο υπολογισμός της παραπάνω τετραγωνικής ρίζας γίνεται με τις παρακάτω δύο μεθόδους που είναι δυνατόν να εφαρμόζονται και όταν το βασικό όρισμα του μιγαδικού αριθμού δεν συμπίπτει με γνωστές γωνίες.

Μέθοδος Ι

Έστω

$$
-15-8\,i=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)=17\,(\cos\theta+i\,\sin\theta),
$$

όταν
$$\cos\theta = -\frac{15}{17} \quad \text{και} \quad \sin\theta = -\frac{8}{17}\,. \tag{1}$$
Τότε από τον τύπο $(4.6.1-1)$ προκύπτει ότι
$$\sqrt{-15-8\,i} = \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\,\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\;; \quad k=0,\,1.$$

Άρα οι ρίζες είναι οι μιγαδικοί αριθμοί:
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{και} && (2)\\ z_1 &= \sqrt{17}\left[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\,\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)\right] = \sqrt{17}\left(-\cos\frac{\theta}{2} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -\sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\right). && (3)\end{aligned}$$

Σύμφωνα με γνωστούς τύπους της Τριγωνομετρίας έχουμε
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-15/17}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+15/17}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}\,.$$

Επειδή σύμφωνα με την (1) η γωνία θ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο - είναι αρνητικά τα πρόσημα των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ - πρέπει η γωνία $\theta/2$ να ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο. Άρα $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ και $\sin\frac{\theta}{2} = +\frac{4}{\sqrt{17}}$, οπότε αντικαθιστώντας στις (2) και (3) προκύπτει ότι $z_0 = -1+4\,i$ και $z_1 = 1-4\,i$.

Μέθοδος II

Έστω ότι οι ρίζες είναι της μορφής $x+i\,y$. Τότε
$$(x+i\,y)^2 = x^2-y^2+2xy\,i = -15-8\,i, \quad \text{οπότε} \quad x^2-y^2=-15, \quad xy=-4.$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $x=\pm1$. Τότε, αν $x=1$ είναι $y=-4$ και, όταν $x=-1$, είναι $y=4$, δηλαδή οι ρίζες είναι οι $-1+4\,i$ και $1-4\,i$ αντίστοιχα. ∎

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί και οι ρίζες να γραφούν στην πολική και την εκθετική μορφή:

$i)\quad (-1+i)^{4/5}$

$ii)\quad (-1-\sqrt{3}\,i)^{1/3}$

$iii)\quad \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2/3}$

$iv)\quad \left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2/3}$

$v)\quad \left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{1/3}$

$vi)\quad (-1-i)^{1/5}.$

2. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις

i) $5z^2+2z+10=0,$

ii) $z^2+(i-2)z+(3-i)=0,$

iii) $z^4+z^2+1=0.$

3. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθεί γεωμετρικά ο μιγαδικός $|z|e^{i\theta}$ όπου $\theta=\mathrm{Arg}(z)$. Τι παρατηρείτε;

4. Αν $z\in\mathbb{C}$ να παρασταθούν γεωμετρικά οι μιγαδικοί

$$\overline{z},\quad -z,\quad z^2,\quad \frac{1}{z}\quad \text{με}\ z\neq 0.$$

5. Όμοια τους μιγαδικούς

$$z_1+z_2,\quad z_1z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},$$

όταν z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ με $z_2\neq 0$.

6. Δείξτε ότι

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}.$$

7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του $z\in\mathbb{C}$ για τις οποίες

$i)\quad e^{3z}=1$

$ii)\quad e^{4z}=i.$

Απαντήσεις

1. Τα αντίστοιχα βασικά ορίσματα είναι: (i) $\frac{3\pi}{4}$, (ii) $\frac{4\pi}{3}$, (iii) $\frac{5\pi}{6}$, (iv) $\frac{\pi}{3}$, (v) $\frac{5\pi}{3}$, (vi) $\frac{5\pi}{4}$.
2. (i) $z = -\frac{1}{5} \pm \frac{7}{5}\, i$, (ii) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2\, i$, (iii) $z = \pm(-1)^{1/3}$, $\pm(-1)^{2/3}$.
3. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της εκθετικής μορφής.
4. Έστω $z = a + i\, b$. Τότε σύμφωνα με το Σχ. 4.5.1 - 1 κ.λπ.
6. Έστω $e^{z_1} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\, \sin y_1\right)$ και $e^{z_2} = e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\, \sin y_2\right)$ κ.λπ.
7. (i) $z = 0,\ -\frac{2\pi}{3}\, i,\ \frac{2\pi}{3}\, i$. (ii) $z = \frac{\pi}{8}\, i,\ -\frac{3\pi}{8}\, i,\ \frac{5\pi}{8}\, i,\ -\frac{7\pi}{8}\, i$

4.7 Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού

4.7.1 Ορισμός και τύπος υπολογισμού

Θεώρημα 4.7.1 - 1 (ύπαρξης). *Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$, τότε υπάρχει πάντοτε ένας άλλος μιγαδικός αριθμός, έστω w, έτσι ώστε $e^w = z$. Ένας από τους μιγαδικούς αυτούς αριθμούς w είναι της μορφής $\ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$, ενώ κάθε άλλος μιγαδικός δίνεται από τη σχέση:*

$$\ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi\right) \quad \text{με} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ορισμός 4.7.1 - 1 (λογάριθμου). *Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z \neq 0$. Αν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος, ώστε $e^w = z$, τότε ο w λέγεται λογάριθμος του z.*

Η ειδική τιμή του w που δίνεται από τον τύπο

$$w = \ln|z| + i\, \mathrm{Arg}\, z \tag{4.7.1 - 1}$$

λέγεται **αρχική τιμή** (principal value) του λογάριθμου και συμβολίζεται με $\mathrm{Ln}z$, ενώ γενικά είναι

$$\ln z = \ln|z| + i\left(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi\right) \quad \text{με} \quad k = 0,\ \pm 1,\ \ldots\,. \tag{4.7.1 - 2}$$

Παράδειγμα 4.7.1 - 1

Να υπολογιστεί η αρχική τιμή του λογάριθμου του μιγαδικού αριθμού

$$z = -2\sqrt{3} - 2i.$$

Λύση. Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$$z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

οπότε

$$\operatorname{Ln}\left(-2\sqrt{3} - 2i\right) = 2\ln 2 + i\,\frac{7\pi}{6}\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η τιμή του λογάριθμου των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

$i)\quad z = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)$ $\qquad ii)\quad z = 1 - i.$

Απαντήσεις

(i) $Arg(z) = \frac{4\pi}{3}$, quad (ii) $Arg(z) = \frac{7\pi}{4}$ κ.λπ.

4.7.2 Μιγαδικές δυνάμεις

Με τη βοήθεια των λογαρίθμων είναι δυνατόν να οριστούν οι μιγαδικές δυνάμεις.

Ορισμός 4.7.2 - 1. *Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq 0$. Τότε η δύναμη z^w ορίζεται από τη σχέση*

$$z^w = e^{w\operatorname{Ln} z}. \tag{4.7.2 - 1}$$

Επειδή

- $$i = 0 + 1\,i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}\,,$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 άμεσα προκύπτει ότι[5]

$$i^{\,i}=e^{i\,\mathrm{Ln}i}=e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}},\quad \text{ενώ}$$

- $$-1=-1+0\,i=\cos\pi+i\,\sin\pi,\quad \text{οπότε}\quad \mathrm{Arg}(-1)=\pi.$$

  Τότε όμοια σύμφωνα με τον Ορισμό 4.7.2 - 1 είναι

$$(-1)^{i}=e^{i\,\mathrm{Ln}(-1)}=e^{i(i\,\pi)}=e^{-\pi}.$$

Παρατήρηση 4.7.2 - 1

Αν ο ν είναι ακέραιος, τότε

$$z^{\,\nu}=e^{\,\nu\,\mathrm{Ln}z}=e^{(\nu-1)\,\mathrm{Ln}z}\,e^{\mathrm{Ln}z}=z^{\,\nu-1}z,$$

δηλαδή ο ορισμός της δύναμης, που ορίζεται με τον τύπο $(4.7.2-1)$, συμφωνεί με τον ορισμό της δύναμης μιγαδικού αριθμού της παραγράφου 4.2.

Δίνονται τώρα χωρίς απόδειξη τα παρακάτω θεωρήματα που αφορούν τον υπολογισμό των μιγαδικών δυνάμεων:

Θεώρημα 4.7.2 - 1. *Αν $z,\,w_1,\,w_2\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$, τότε*

$$z^{w_1}z^{w_2}=z^{w_1+w_2}.$$

Θεώρημα 4.7.2 - 2. *Αν $z_1,\,z_2\in\mathbb{C}$ με $z_1z_2\neq 0$, τότε*

$$(z_1z_2)^{w}=z_1{}^{w}\,z_2{}^{w}e^{2\pi i w\,\mathrm{k}(z_1,z_2)}$$

[5]Επομένως το **μαθηματικό παράδοξο**: *η μιγαδική φανταστική μονάδα, όταν υψωθεί στη φανταστική μονάδα να ισούται με* πραγματικό αριθμό.

όπου

$$\mathrm{k}\left(z_1, z_2\right) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad -\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \pi \\ 1 & \alpha\nu \quad -2\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq -\pi \\ -1 & \alpha\nu \quad \pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι

i) $(1+i)^i = \left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right] e^{-\frac{\pi}{4}}$,

ii) $\left|(-1)^{-i}\right| = e^{\frac{3\pi}{2}}$.

4.8 Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος, Θ. (2008). *Μιγαδικές Συναρτήσεις.* Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 978–960–456–092–9.

[3] Τσάγκας, Γρ. (1990). *Μαθήματα Μιγαδικών Συναρτήσεων.* Θεσσαλονίκη.

[4] Churchill, R. & Brown, J. (2005). *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. ISBN 960–7309–41–3.

[5] Spiegel, M. (2009). *Complex Variables.* Εκδότης McGraw-Hill Education – Europe. ISBN 007–060–230–1.

[6] Spiegel, M. & Wrede, R. (2006). *Ανώτερα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Τζιόλα. ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/