Μαθηματικά Προσανατολισμού

Β΄ Λυκείου

Επανάληψη Χριστουγέννων

Αφού κάνετε μια επανάληψη στο πρώτο κεφάλαιο και θυμηθείτε όλους τους τύπους και τις μεθοδολογίες, να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις από την τράπεζα θεμάτων.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

2.18603. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημεία $Δ$ και $Ε$ του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{ΑΔ} = 2\overrightarrow{ΑΒ} + 5\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = 5\overrightarrow{ΑΒ} + 2\overrightarrow{ΑΓ}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΕ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$. Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ είναι παράλληλα. Μονάδες 12

2.18604. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε,Ζ σημεία τέτοια ώστε :

$\overrightarrow{ΑΕ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{ΑΓ}$

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΕΖ}$ και $\overrightarrow{ΖΒ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$. Μονάδες 13

β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία Β , Ζ και Ε είναι συνευθειακά. Μονάδες 12

2.20054. Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5\overrightarrow{ΡΛ} = 2\overrightarrow{ΡΚ} + 3\overrightarrow{ΡΜ}.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει:

$2\overrightarrow{ΑΛ} + 3\overrightarrow{ΒΛ} + 2\overrightarrow{ΜΒ} = \overrightarrow{ΑΚ} + \overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΒΚ}$, όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου. Μονάδες 15

2.22518. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν $\overrightarrow{ΟΑ} = \vec{α} + 2\vec{β} + 5\vec{γ}$,

$\overrightarrow{ΟΒ} = -\vec{α} + 3\vec{β} + 4\vec{γ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ} = 3\vec{α} + \vec{β} + 6\vec{γ}$, τότε:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΑΓ}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{α}, \vec{β}, \vec{γ}$. Μονάδες 13

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μονάδες 12

4.22561. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{β}$. Θεωρούμε σημεία Ε,Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{ΑΕ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ΑΓ}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{4}\left(\vec{α} + \vec{β}\right)$ Μονάδες 8

β) $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$. Μονάδες 12

γ) τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακά. Μονάδες 5

Συντεταγμένες στο επίπεδο

2.18605.Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{i}-5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. Μονάδες 12

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου. Μονάδες 13

2.20055.Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1,3)$, $B(\alpha,4)$ και Γ (-4, 5α+4), $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.
Μονάδες 8

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$.
Μονάδες 7

2.20061.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4, 3) και Δ(2, 3) .

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ.
Μονάδες 9

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β.
Μονάδες 16

2.20071.Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2\alpha,\ 4\alpha-2)$ και $B(5\alpha+1,-\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}|=10$. Μονάδες 12

β) Έστω $\alpha=2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Μονάδες 13

2.20073.Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(-2,-4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.
Μονάδες 8

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ. Μονάδες 10

γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
Μονάδες 7

2.20148 .Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{\beta}=2\vec{i}-5\vec{j}$ και $\vec{\gamma}=(7,3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμικά ανά δύο. Μονάδες 10

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Μονάδες 15

Συντεταγμένες διανύσματος

2.22530. Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ ώστε $\overrightarrow{AB}=(-1,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Μονάδες 15

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. Μονάδες 10

Εσωτερικό γινόμενο

2.18556.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}, |\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
Μονάδες 8

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ.
Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.
Μονάδες 7

2.18558.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$,όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.
Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία. Μονάδες 10

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.
Μονάδες 8

2.18581.Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$ Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ Μονάδες 15

2.18598.Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=\left(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,6)$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.
Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.
Μονάδες 9

γ) Για $\kappa=1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.
Μονάδες 8

2.20053.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|=4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$. Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}=\vec{0}$. Μονάδες 15

2.20056.Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{u}$. Μονάδες 16

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.
Μονάδες 9

2.20070.Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

$3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9,\ 2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.
Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Μονάδες 13

2.20057.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης:
$\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\beta}\right)$. Μονάδες 10

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-2\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+2\cdot\vec{\alpha}$. Μονάδες 15

2.20058. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

Μονάδες 10

β) το διάνυσμα $\vec{u}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\cdot\vec{\alpha}$

Μονάδες 15

2.20059. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-\frac{1}{2})$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ Μονάδες 10

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}=(x^2,x-1)$ είναι κάθετα. Μονάδες 15

2.22505 . Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u}\perp\vec{v}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$. Μονάδες 13

2.22517. Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{7},1\right)$ και $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=(\mu+2,7-2\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ. Μονάδες 10

β) Αν μ=2, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$. Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$

Μονάδες 5

2.22524. Έστω $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-5,1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}}$. Μονάδες 13

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Μονάδες 12

2.22527. **α)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει:

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2$. Μονάδες 12

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.
Μονάδες 13

4.18606.Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.
Μονάδες 4

β) Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β , τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\alpha-4,\beta+2)$
Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι: 4α + 3β = 10
Μονάδες 6

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . Μονάδες 10

4.18616.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$,

$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και $\vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
Μονάδες 3

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa=-2$
Μονάδες 6

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
Μονάδες 8

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.
Μονάδες 8

4.18618. α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ και $|\vec{u}+\vec{v}|=\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|$ **.** Μονάδες 10

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3}=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{7}$

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$
Μονάδες 8

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha}+3\vec{\gamma}=0$
Μονάδες 7

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

2.20050. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 10

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.
Μονάδες 15

2.20052. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=7$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$.
Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.
Μονάδες 9

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.
Μονάδες 10

2.20069. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τη προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 10

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. Μονάδες 15

2.20050. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 10

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 15